Polikristāliskā silīcija solārajiem paneļiem ražošanas tehnoloģijas ar orientētās kristalizācijas metodi izpēte un optimizācija

Ievads

Tiek pētīta stratificēta elektromagnētisku spēku ierosināta plūsma, kas ir raksturīga silīcija orientētās kristalizācijas metodē, ko izmanto fotovoltaikas (solārā) silīcija ražošanā. Šajā procesā silīcija maisīšanas nepieciešamību nosaka ekonomiskie aspekti. Gatava multikristāliska silīcija bloka perifērajā zonā lādiņnesēju dzīves laiks ir krietni mazāks, salīdzinot ar bloka iekšējo zonu. Tas ir saistīts ar dažādu piemaisījumu difūziju no kvarca tīģeļa un tā pārklājuma. Vienkāršākais veids, kā var samazināt šo piemaisījumu daudzumu ir samazināt procesa laiku, t.i. palielināt kristalizācijas ātrumu. Taču palielināts kristalizācijas ātrums noved pie izliektas kausējuma frontes formas fāzu pārejas īpatnējā siltuma dēļ, un pie difūzijas robežslāņa bagātināšanās ar piemaisījumiem. Kausējuma maisīšana palīdz novērst šīs abas problēmas.

Kausējuma plūsmas pētījumi orientētās kristalizācijas metodes krāsnīs, kas sastopami literatūrā, ir skaitliski aprēķini vai eksperimentāli modeļi ar zemas kušanas temperatūras materiāliem. Galvenais ierobežojošais faktors eksperimentālo mērījumu veikšanai ir augstā kušanas temperatūra, kas padara plaši pieejamo mērīšanas tehnoloģiju izmantošanu neiespējamu.

Vairāki darbi ar modeļeksperimentiem ir aprakstīti literatūrā, tomēr tie ir veikti vai nu izotermiskam šķidrumam (bez vertikālās temperatūras starpības), vai nu ar ļoti nelielu temperatūras starpību (mazu Ričardsona skaitli). Tādā veidā var tikt sasniegta Reinoldsa skaitļa līdzība ar industriāla izmēra krāsnīm, tomēr Ričardsona skaitļa līdzībai nepieciešamas ievērojami lielākas temperatūras starpības. Šāda modeļeksperimenta izveide sniegtu labāku priekšstatu par kausējuma plūsmas raksturu orientētās kristalizācijas krāsnī.

Tādējādi ir pamats apgalvot, ka termiski stratificētas elektromagnētisku spēku ierosinātas plūsmas turbulentos raksturlielumus nevar aprakstīt ar izotropas turbulences pieeju. Kritiskā Ričardsona skaitļa tuvumā šādās plūsmas ir novērojamas izteiktas izmaiņas pamatplūsmas raksturā.

Pētījuma mērķis ir izpētīt solārā silīcija stratificētas elektromagnētisku spēku ierosinātas plūsmas, lai uzlabotu solāro elementu ražošanas tehnoloģijas, nodrošiīnot saules baterijām lielāku efektivitāti un mazāku pašizmaksu.

Darba mērķis ir sasniedzams, izpildot šādus uzdevumus:

1. Veikt divdimensionālas plūsmas teorētisko analīzi kvadrātveida tīģelī, izvest plūsmas ātruma atkarību no elektromagnētiskā spēka sadalījuma formas un amplitūdas, salīdzināt rezultātus ar literatūrā atrodamajiem.
2. Izpētīt plūsmas pāreju (virpuļu apvienošanos) pie vidējiem Reinoldsa skaitļiem, izmantojot sālsūdens līdzības modeli, atrast plūsmas pārejas kritērijus.
3. Uzprojektēt un uzbūvēt eksperimentālu iekārtu ar zemas kušanas temperatūras metālu (Vuda sakausējumu), kas modelē orientētās kristalizācijas krāsni ar vertikālu siltuma plūsmu. Veikt temperatūras un ātruma mērījumus šķidrajā metālā.
4. Izveidot modeļeksperimenta skaitlisko modeli, salīdzināt tā rezultātus ar eksperimentālajiem datiem.
5. Veikt plūsmas anizotropijas analīzi, salīdzināt plūsmu dažādos režīmos (izotermiskā un stratificētā), noteikt turbulentās siltuma pārneses atkarību no plūsmas režīma.

Šī pētījuma novitāti nosaka tas, ka pirmo reizi ir iegūts analītisks novērtējums ātruma atkarībai no EM lauka frekvences tilpumos ar kvadrātveida horizontālo šķērsgriezumu. Pēc līdzīga principa iegūta tāda pati atkarība plūsmai cilindriskos tīģeļos - tā saskan ar literatūrā atrodamo atrisinājumu, kurā izmantots pieņēmums par ātruma sadalījumu. Šajā pētījumā atkarība iegūta atrisinot plūsmas vienādojumu.

Uzbūvēta eksperimentālā iekārta - orientētās silīcija kristalizācijas metodes modelis, ar kuru iespējams sasniegt ievērojami lielākas temperatūras starpības, nekā atrodams literatūrā, līdz ar to pētījumi veikti pie lielākiem Ričardsona skaitļiem.

Pirmo reizi ir parādīts, ka orientētās kristalizācijas metodē kausējuma plūsmas turbulentās īpašības ir izteikti anizotropas. Šis fakts norāda uz standarta divparametru turbulences modeļu nepiemērotību šādu problēmu risināšanā, kaut arī literatūrā sastopami daudzi darbi, kuros līdzīgās situācijās šie modeļi tiek izmantoti.

Pētījums šajā darbā ir veikts izmantojot matemātiskās modelēšanas metodi, analītiski veicot vienkāršotas plūsmas analīzi, kā arī skaitliski veicot elektromagnētisko lauku, šķidruma plūsmas un temperatūras lauku aprēķinus. Šie modeļi tika verificēti veicot temperatūras un ātruma sadalījuma mērījumus izveidotajos eksperimentālajos modeļos.

1. Stratificētas plūsmas vienkāršotā analīze

1.1. 2D analītisks modelis

Pirms sākt trīsdimensionālo procesu analīzi fizikālajā modelī, tika veiktas vairākas vienkāršotas analīzes, pieņemot, ka izteikti stratificētā plūsmā, vertikālā ātruma komponente ir ļoti maza, un plūsmu var analizēt 2D tuvinājumā.

Vienkāršākā plūsma, kam ir līdzība ar apskatāmo plūsmu klasi (elektromagnētiski ierosinātas plūsmas), un ko var aprēķināt analītiski, ir Stoksa plūsma 2D bez pielipšanas robežnosacījumiem. To apraksta nehomogēns biharmoniskais vienādojums:

$$\nabla^4\psi = \mathrm{F(x,y)}$$

Šeit ψ - plūsmas funkcija, $\mathrm{F(x,y)} = (\nu\rho)^{-1}\left(\frac{\partial \mathrm{f_y}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{f_x}}{\partial \mathrm{y}}\right)$, f - spēka blīvums. Lai gan šāda vienkāršota plūsma liekas ļoti attāls tuvinājums reālām plūsmām, tomēr ir parādīts, ka arī šādā tuvinājumā iespējams analizēt vairākus plūsmas aspektus, piemēram ātruma atkarību no EM spēkiem, jo izpildās bilance starp EM spēku un viskozajiem spēkiem [1].

Izmantojot Dīraka delta funkcijas Furjē rindu, var iegūt Grīna funkciju šai problēmai:

$$G(x,y,\xi,\eta) == \frac{1}{L_x L_y}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p_n^2+q_k^2)^2}\sin(p_n x)\sin(q_k y)\sin(p_n \xi)\sin(q_k \eta)$$

Šeit p un q - koeficienti $p_n=\pi n/L_x$, $q_n=\pi k/L_y$. $L_{x,y}$ - 2D apgabala izmēri x un y virzienā.

Kad ir zināma Grīna funkcija, nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu var iegūt jebkurai analītiskai spēka funkcijai:

$$\psi(x,y) = \int_{-L_x}^{L_x}\int_{-L_y}^{L_y} F(\xi,\eta)\, G(x,y,\xi,\eta)\, d\xi d\eta$$

Lai ilustrētu šo pieeju, tika izvēlēts spēks, kurš dilst eksponenciāli virzienā no sienas uz apgabala vidu, un kura maksimālā vērtība ir skaldnes viduspunktā, līdzīgi kā cilindriskās indukcijas krāsnīs [2]. Spēks pielikts uz divām pretējām skaldnēm tā, ka viena spēka komponente ir 0 (tā, kuras virziens paralēls skaldnes pieskarei, teiksim y), bet otra, x, izsakās ar sadalījumu $f_x=A\ \mathrm{sh}(2x/\delta)\cos(\pi y/(2L_y))$. Šeit δ - magnētiskā lauka skinslāņa biezums, A - konstante. Konstante 2 zem *sh* funkcijas norāda uz to, ka Lorenca spēka blīvums

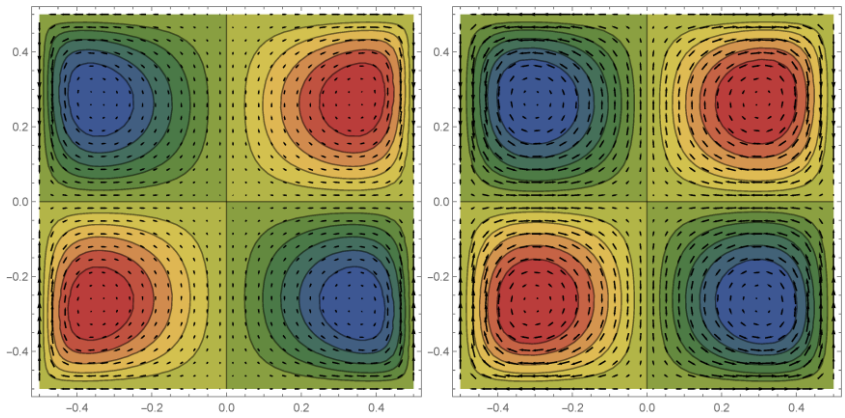
eksponenciāli dilst virzienā prom no sieniņas divas reizes ātrāk nekā magnētiskais lauks. Izmantojot jau aprakstīto integrēšanu, iegūst plūsmas funkciju:

$$\psi(x,y) = \Psi_0 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{n,k}\sin(p_n x)\sin(q_k y)$$

$$C_{n,k} = \frac{(-1)^n(-1)^k nk}{\left(p_n^2 + {}^4/_{\delta^2}\right)(4k^2-1)(p_n^2+q_k^2)^2}$$

$$\Psi_0 = \frac{8\pi A \sinh\left({}^{2L_x}/_{\delta}\right)}{\varrho v L_x^2 L_y}$$

Izmantojot jau iegūto plūsmas funkciju, un tās definīciju, var iegūt ātruma sadalījumu. Pie vienādiem izmēriem abos virzienos Lx=Ly=0,5m, iegūst sadalījumu, kas parādīts attēlā 1.1.



Attēls 1.1. Analītiski iegūtā plūsmas funkcija (attēlota krāsās), un attiecīgais ātruma lauks (vektori) diviem dažādiem skinslāņa biezumiem. Pa kreisi δ=0,01 m, pa labi δ=0,2 m.

Iegūtā plūsma sastāv no 4 pamatvirpuļiem, divi no tiem rotē vienā virzienā, divi - pretējā. Aprēķini veikti konstantam koeficientam Ψ_0=20100 $s^{-1}m^{-4}$ diviem dažādiem skinslāņa biezumiem - δ=0,01 m un δ=0,2 m. Rezultāti parāda, ka mazāks skinslāņa biezums noved pie mazāk cirkulāriem virpuļiem.

Summas aprēķinā izmantoti N=50 rindas locekļi, un ir parādīts, ka pie šāda locekļu skaita, rinda konverģē līdz 99,5% precizitātei. 90% precizitāte tiek sasniegta jau ar 10 rindas locekļiem. Tomēr rindas konverģence atkarīga arī no bezdimensionālās frekvences $\tilde{\omega} = 2(L/\delta)^2$. Pie $\tilde{\omega} = 20000$ nepieciešams vairāki rindas locekļu, jo N=50 dod tikai 95% precizitāti. No otras puses, pie $\tilde{\omega} = 2$ jau pirmais rindas loceklis dod 95% precizitāti. Pie lieliem $\tilde{\omega}$ pirmais rindas loceklis dod līdz 70 % precizitāti.

Plūsmas ātruma atkarība no EM lauka frekvences ir plaši pētīta [3], tomēr nav noteikta atkarība, kas der visām plūsmām. Šajā izvedumā ievestais parametrs A arī var būt atkarīgs no frekvences. Ir zināms atrisinājums bezgalīgai vadošai pustelpai mainīgā magnētiskā laukā, kurai spēka blīvums pie virsmas izsakās kā:

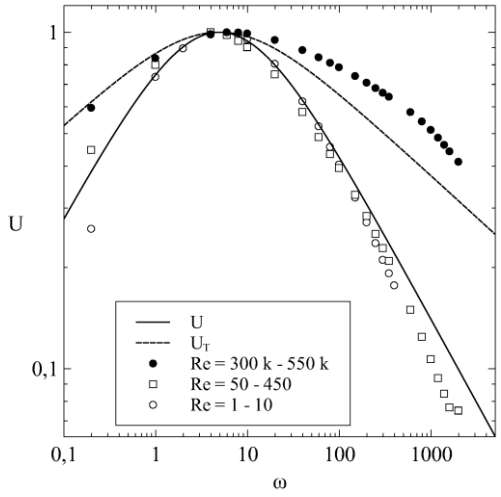
$$f = \frac{B_0^2}{2\mu\mu_0\delta}\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)$$

No šejienes var iegūt vienkāršotu sakarību starp bezdimensionālo frekvenci un plūsmas ātrumu. Lai rezultāts būtu maksimāli vienkāršs, tiks ņets vērā tikai pirmais rindas koeficients C_{11}:

$$U(\widetilde{\omega}) \sim \frac{\sqrt{\widetilde{\omega}}}{\pi^2 + 2\widetilde{\omega}}$$

Lai validētu šos teorētiskos novērtējumus, tika veikti 2D skaitliskie aprēķini, tomēr šajā gadījumā visi vienkāršojumi tika atmesti - tika ņemts vērā konvektīvais loceklis Navjē Stoksa vienādojumā, kā arī pielipšanas nosacījums uz sieniņām. Skaitliskajā aprēķinā tika izmantots k-ω SST turbulences modelis. Spēka funkcija izmantota tāda pati kā analītiskajā novērtējumā.

Salīdzinājumam ar analītisko novērtējumu tika izmantots maksimālais ātrums tiplumā. Tā kā ātruma absolūtā vērtība stipri atšķiras aprēķiniem ar un bez pielipšanas nosacījuma uz sienām, visi rezultāti ir normēti tā, lai maksimālais ātrums ($U(\widetilde{\omega})$ atkarības līknē) būtu 1. Maziem Reinoldsa skaitļiem, Re<1000, ir iegūta laba sakritība starp analītisko novērtējumu un skaitliskajiem rezultātiem (attēls 1.2.). Lielākiem Reinoldsa skaitļiem skaitliskajos rezultātos maksimālais ātrums ir pie tām pašām $\widetilde{\omega}$ vērtībām, bet ātrums dilst lēnāk pie lieliem $\widetilde{\omega}$.



Attēls 1.2. Plūsmas ātruma atkarība no frekvences. Līnijas atbilst analītiskam novērtējumam, simboli - skaitliskam aprēķinam.

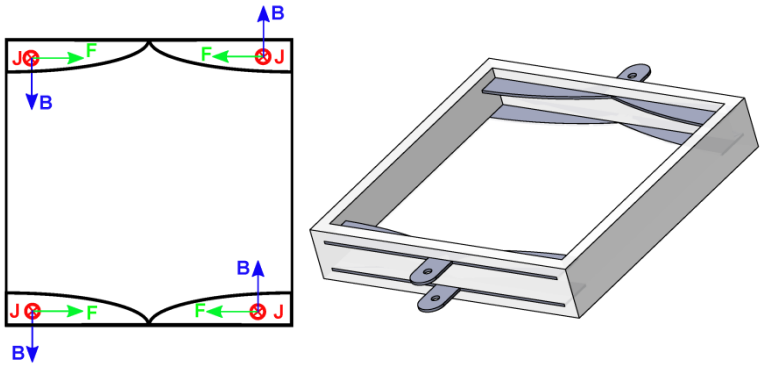
Plūsmām, kurās ir izteikti inerciālie efekti, turbulences ietekme var tikt ņemta vērā, izmantojot turbulentās viskozitātes pieeju. Attīstītā turbulences režīmā, pie lieliem Re, mērogu analīze norāda uz to, ka $\nu << \nu_t \sim U$. Aizvietojot Ψ_0 izteiksmē ν ar $\nu_t = KU$, var iegūt vienkāršu tuvinājumu ātrumam turbulentajā režīmā: $U_T(\tilde{\omega}) \sim \sqrt{U(\tilde{\omega})}$. Šī sakarība sakrīt ar asimptotisko tuvinājumu lielām frekvencēm $\lim_{\tilde{\omega}\to\infty} U_T(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^{-1/4}$, kas ir dots literatūrā [4]. Tāpat $U_T(\tilde{\omega})$ labāk sakrīt ar skaitliskajiem rezultātiem pie lielām $\tilde{\omega}$ vērtībām.

1.2. Virpuļu apvienošanās sālsūdens modelī

Cita metode, ko var lietot vienkāršotai stratificētas plūsmas analīzei, ir plānu 2D slāņu izmantošana. Šim nolūkam tika izveidots sālsūdens modelis ar speciāla dizaina elektrodiem un spolēm ar magnētvadiem. Ātruma mērījumi šajā modelī tika veikti ar PIV metodi. Šo mērījumu mērķis ir atrast kritisko Reinoldsa skaitli, pie kura notiek virpuļu apvienošanās, kas ir zināma parādība Teilora-Grīna virpuļos [5].

Pamatideja ir radīt tādu $\nabla \times f$ sadalījumu, kas ir līdzīgs analītiskajā modelī izmantotajam. Attēls 1.3. ilustrē spēka iegūšanas principu.

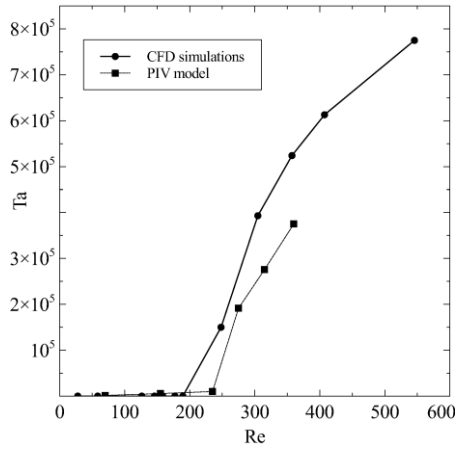
Izveidotā iekārta sastāv no akrila stikla tilpuma ar iekšējiem izmēriem 100 mm × 100 mm × 15 mm (attēls 1.3. pa labi). Maiņspriegums ir pielikts diviem tērauda elektrodu pāriem, attālums starp elektrodiem ir 10 mm. Magnētisko lauku rada divas spoles ar iekšējo diametru 170 mm un 400 vara vijumiem ar vada diametru 1 mm.



Attēls 1.3. Spēka izraisīšanas princips sālsūdens modelī (pa kreisi). Akrila stikla modelis (gaiši pelēks) ar tērauda elektrodiem (tumši pelēks). Spoles magnētiskā lauka iegūšanai nav attēlotas.

Ātruma mērījumi veikti izmantojot PIV metodi. Tilpuma centrālajā punktā tika reģistrēta ātruma virpuļainība ω_v, ar mērķi reģistrēt virpuļu apvienošanos kvantitatīvi – pirms apvienošanās virpuļainība centrālajā punktā ir 0, toties, kad izveidojās viens dominējošais virpulis, tai ir no nulles atšķirīga vērtība. Teilora skaitļa aprēķinā izmantota virpuļainība $Ta = \omega_v^2 L^4/\nu^2$. Reinoldsa un Teilora skaitļi, kas iegūti PIV mērījumos, Attēlā 1.4. ir parādīti grafiski un salīdzināti ar aprēķinu rezultātiem.

EM lauka aprēķini tika veikti ar ANSYS programmpaketi, bet šķidruma dinamikas aprēķini ar ANSYS CFX. Šķidruma kustības aprēķini norāda uz virpuļu apvienošanos pie Reinoldsa skaitļa $Re_C \approx 210$ (attēls 1.4.), kas ir nedaudz mazāks, nekā eksperimentāli atrastais $Re_C \approx 250$.

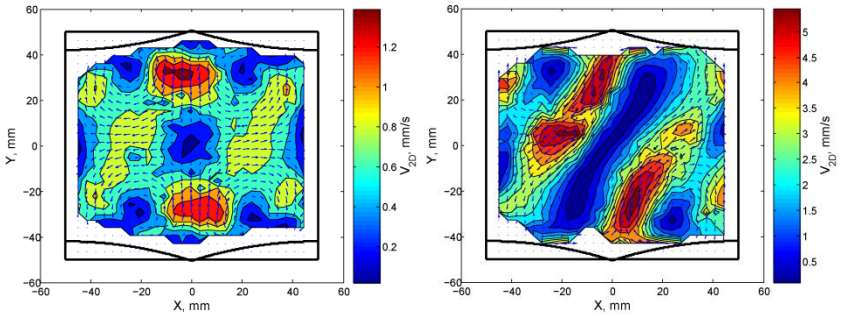


Attēls 1.4. Teilora skaitļa atkarība no Reinoldsa skaitļa PIV mērījumu un aprēķinu rezultātos.

Attēls 1.5. parāda 2D ātruma sadalījumus, kas iegūti PIV mērījumos abiem plūsmas režīmiem. Neliela plūsmas asimetrija ir novērojama jau plūsmā zem kritiskā Re (attēls 1.5. pa

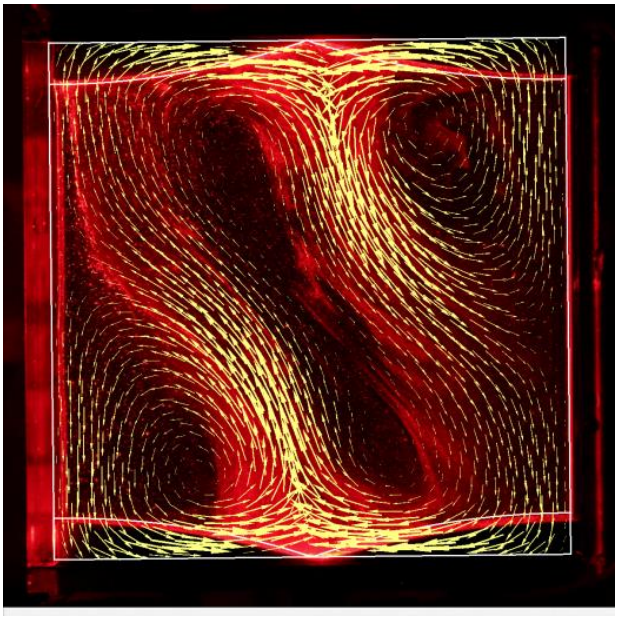
kreisi), kas ir saistīts ar eksperimentālās iekārtas neideālo simetriju. Asimetriju parādīja arī plūsma ar apvienotajiem virpuļiem – pamatvirpuļa rotācijas virziens vienmēr bija pretējs pulksteņrādītāja kustības virzienam. Arī gadījumos, kad tika pielikta manuāla maisīšana pretējā virzienā, pēc kāda laika plūsma rotēja pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam.

Ar šo modeli tika parādīts, ka noteiktos gadījumos elektrolīts var tikt izmantots kā modeļšķidrums EM spēku izraisītai kustības izpētei šķidrajos metālos. Tomēr šī pieeja ir ierobežota izmantošanai izotermisku plūsmu pētījumiem. Lielo Prandtļa skaitļa atšķirību dēļ ūdens nevar tikt izmantots kā modeļšķidrums termiskiem procesiem. Grūtības var sagādāt arī piemērotu elektrodu un magnētvadu konfigurācijas atrašana, lai varētu iegūt vēlamo spēku lauku.



Attēls 1.5. Divas stabilas plūsmas, kas iegūtas virs un zem kritiskā Reinoldsa skaitļa. Pa kreisi Re=70, pa labi - Re=275.

Viens no svarīgiem limitējošiem faktoriem ir arī gāzes burbuļu veidošanās elektrolīzes procesā. Tika atrastas kritiskās strāvas vērtības, pie kurām PIV izmantošana vairs nebija iespējama. Attēls 1.6. parāda ātrumus, kas iegūti ar PIV pie pārāk lielas strāvas. Šāds attēls nav izmantojams PIV, tomēr tas skaidri parāda virpuļu struktūru plūsmā. Dzeltenie vektori, kas attēlā uzlikti virsū, ir iegūti aprēķinā un parāda labu sakritību.

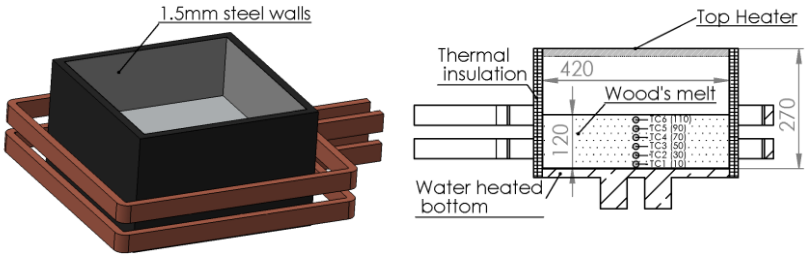


Attēls 1.6. Foto, kas iegūts PIV mērījumos ar strāvas blīvumu j=1600 A/m^2. Dzeltenie vektori parāda ātrumu lauku skaitliskajos aprēķinos.

2. Orientētās kristalizācijas fizikālais modelis

2.1. Eksperimentālais modelis

Eksperimentālie rezultāti tika iegūti izmantojot fizikālo modeli (attēls 2.1.), kurš sastāv no kvadrātveida tērauda tīģeļa (sienas biezums 1.5mm), ar malas garumu W=420 mm un augstumu H=270 mm. Tīģelis piepildīts līdz L=120mm līmenim, novietots uz alumīnija plates ar konstantu temperatūru, kura ir sasniegta ar karsta ūdens plūsmu (T=80°C). Kā darba šķidrums tika izmantots Vuda metāls (50% Bi, 25% Pb, 12.5% Sn, 12.5% Cd, kušanas temperatūra T=80°C). Tabulā 2.1. apkopotas apkopo Vuda metāla materiālu īpašības salīdzinājumā ar silīcija kausējuma īpašībām. Atšķirības starp abiem materiāliem ir vienas kārtas ietvaros, kas pieļauj Vuda metāla izmantošanu eksperimentālajam modelim.



Attēls 2.1. Eksperimentālā modeļa skice. Pa kreisi - 3D skats. Pa labi - vidussķēlums. Termopāru pozīcijas ir attēlotas ar TC1...6.

Tīģeli aptver divi vara vijumi, kuri ir pievienoti vienā fāzē pie 50 Hz barošanas avota. Tā kā abi vijumi ir savienoti ar tiltu, strāva var pārdalīties, radot atšķirīgas strāvas vērtības abos vijumos. Tomēr strāvu attiecība starp abiem vijumiem nekad nepārsniedza 1.08. Maksimālā summārā strāva bija 5000 A, ar kopējo jaudu līdz 8.2 kW.

Starojuma sildītājs tika izmantots kā tīģeļa vāks, tādējādi veidojot vertikālo siltuma plūsmu un temperatūras starpību starp kausējuma augšējo virsmu un dibenu. Vuda metāla emisijas koeficients $\varepsilon \approx 0.15$ neļauj to sildīt starojuma ceļā, tādēļ lielākā daļa siltuma tika pārnesta caur gaisu, kurš saņēma siltumu no sildītāja. Šajā iekārtā ir iespējams sasniegt vertikālo temperatūras starpību līdz 80°C (nekustīgā šķidrumā). Vertikālais temperatūras profils tika mērīts izmantojot termopārus, kuru vertikālās koordinātes z ir parādītas modeļa skicē (attēls 2.1. z=0 atbilst tīģeļa dibenam).

Šī eksperimentālā iekārta ļauj veikt mērījumus ar ultraskaņas metodi (UDV - Ultrasound Doppler Velocimetry). Ātruma profili tika iegūti ar vienu ultraskaņas zondi, mērot caur sienu un brīvo virsmu. Iegūstot 2D ātruma sadalījumus, vairāki profili tika uzņemti vienā plaknē.

Tabula 2.1. Šķidra silīcija un Vuda metāla fizikālās īpašības

Īpašība	**Silīcijs**	**Vuda metāls**	**Attiecība**
Blīvums, kg/m^3	2530	9400	3,72
Kin. viskozitāte, $m^2/s \cdot 10^{-7}$	3,3	4,5	1,36
Siltumvadītspēja, W/m K	67,0	14,0	0,21
Īpatnējā siltumietilpība, J/kg K	990	168	0,17
Termiskās izplešanās koeficients, $1/K \cdot 10^{-4}$	1,44	1,20	0,83
Elektriskā vadītspēja, $S/m\ 10^6$	1,2	1,15	0,96

2.2. Fizikālā modeļa mērogošana

Šī darba pētījuma rezultātu mērogošanai, jābūt saskaņotiem visiem bezdimensionālajiem parametriem. Tika aprēķināti visi būtiskie parametri sekmīgai rezultātu pārrēķināšanai uz 5 paaudzes (G5) silīcija krāsni ar tīģeļa malas garumu L=840mm un piepildījumu līdz līmenim H=240 mm. Bezdimensionālie parametri, kas šeit tika aprēķināti, ir molekulārais Prandtļa skaitlis Pr, bezdimensionālā frekvence ω̃, Reinoldsa skaitlis Re, Grashofa skaitlis Gr, Ričardsona skaitlis Ri un magnētiskās iedarbības parametrs F_{EM}.

Saskaņojot visus bezdimensionālos raksturlielumus, tika iegūtas sakarības, kas ļauj pārrēķināt šī darba rezultātus uz G5 silīcija krāsni. Šeit indekss M atbilst fizikālajam modelim, indekss G5 - industriālajai krāsnij:

- Frekvence: $f_{G5}=0.24\ f_M$
- Magnētiskā lauka indukcija: $B_{G5}=0.134\ B_M$
- Plūsmas ātrums: $U_{G5}=0.37\ U_M$
- Temperatūras starpība: $\Delta T_{G5}=0.056\ \Delta T_M$
- Temperatūras gradients: $G_{G5}=0.028\ G_M$

Tipiskās šo parametru vērtības eksperimentālajā iekārtā, kā arī uz G5 krāsni pārrēķinātās vērtības ir parādītas Tabula 2.2.

Tabula 4.2.Tipisko modeļeksperimenta parametru un attiecīgo vērtību G5 krāsnij apkopojums

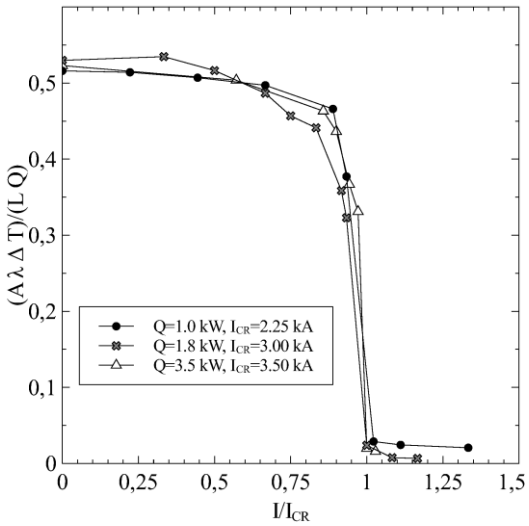
Īpašība	Modelis	G5
Garums, cm	42	84
Frekvence, Hz	50	12
Magn. lauka intensitāte kausējumā, mT	20	2,7
Temperatūras gradients, K/m	750	21
Ātrums, cm/s	5,0	1,85

2.3. Eksperimentālo mērījumu rezultāti

Temperatūras mērījumi tika veikti ar 0,5 mm K-tipa termopāriem. Laika konstante tika noteikta, uzņemot temperatūras datus pēc termopāru iemērkšanas Vuda metālā, noteiktā vērtība bija 100 ms.

Stratifikācijā svarīgs efekts ir vertikālās plūsmas slāpēšana, ieskaitot arī vertikālo turbulento siltuma un masas pārnesi. Šis fenomens tika novērots sekojošā eksperimentā: pie konstantas starojošā sildītāja jaudas Q, strāva vijumos tika ieslēgta vienmēr ar citu vērtību I, vienmēr pie vienādiem sākuma nosacījumiem (stāvošs šķidrums, nostabilizējies temperatūras gradients). Pēc jaunā līdzsvara iestāšanās (ar EM maisīšanu), tika noteikt jaunā bezdimensionālā temperatūras starpība $\Delta\widetilde{T}$, kas definēta kā:

$$\Delta\widetilde{T} = \frac{A\lambda\Delta T}{L\,Q}$$



Attēls 2.2. Vertikālās temperatūras starpības atkarība no strāvas vijumos.

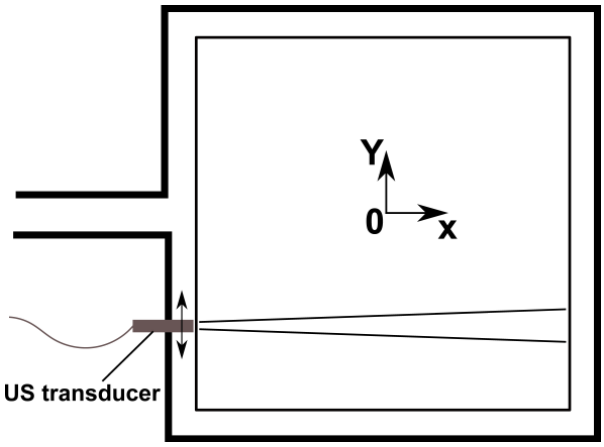
Attēls 2.2. parāda $\Delta\widetilde{T}$ atkarību no strāvas I/I_{CR}, kur I_{CR} - ir kritiskā strāvas vērtība, pie kuras Ričardsona skaitlis kļūst mazāks par 1. Vertikālā temperatūras starpība mazliet samazinās pieaugot strāvai arī zem I_{CR}. To var izskaidrot ar turbulento pulsāciju intensitātes pieaugumu, kas paaugstina efektīvo (turbulento) siltumvadītspēju.

Mazai strāvai normētā temperatūras starpība tiecas uz asimptotisko vērtību 0,5. Tas liecina, ka tikai puse no sildītāja jaudas plūst cauri šķidrumam vertikālā virzienā, pārējais ir zudumi caur vāku un sienām.

Pie I_{CR}bīdes spriegumu ģenerētā turbulentā kustība vairs netiek kompensēta ar cēlējspēkiem un kustības raksturs izmainās no kvazi-2D uz trīsdimensionālu, haotisku, attīstītu turbulentu kustību.

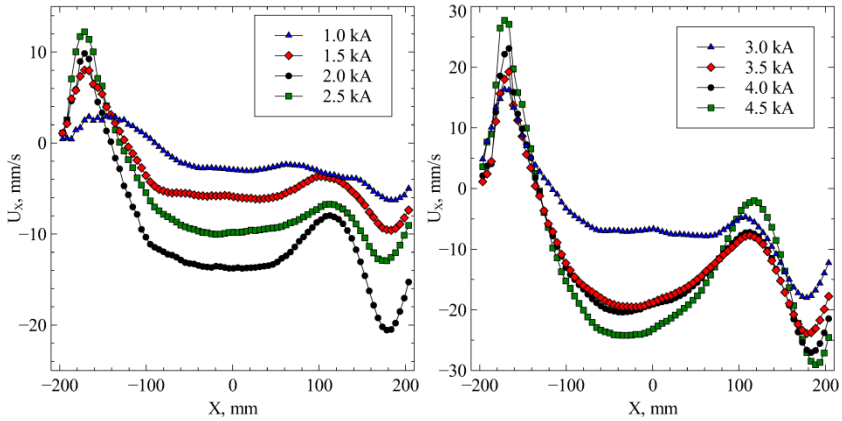
Ātruma mērījumi tika veikti ar 10 mm ultraskaņas zondi caur tērauda sienu izotermiskai un stratificētai plūsmai. Attēls 2.3. ilustrē mērījumu principu, mērījumi vienmēr veikti caur

kreiso sienu. Koordinātu sistēma ieviesta tādējādi, lai punkts (X,Y)=(0,0) būtu tīģeļa centrā. Trešajai (Z) asij nulles punkts atrodas tīģeļa dibenā. Tādējādi visu koordinātu vērtību maiņas apgabali ir X,Y=-210 mm...210 mm, Z=0...120 mm.



Attēls 2.3. Ultraskaņas zondes pozīcija. Zonde var tikt kustināta gar sienu, lai iegūtu ātruma profilus dažādās vietās.

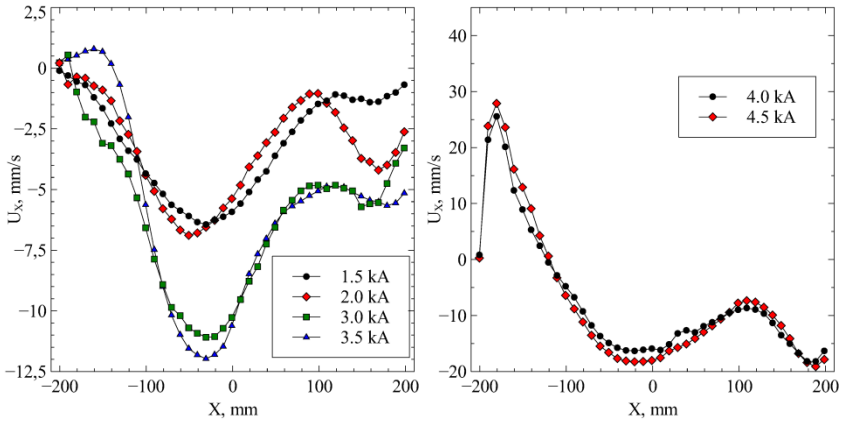
Ātruma sadalījums gar horizontālu līniju pie dažādām strāvas vērtībām izotermiskā plūsmā parādīja ātruma profila izmaiņas palielinoties strāvai. Mērījumi veikti uz horizontālas līnijas (Y, Z)=(0 mm, 80 mm). Pie mazām strāvām (I=1,0 kA) pīķis, kas ir tuvu zondei (X=-210 mm) ir plats (aptuveni 100 mm) un maksimālā vērtība sasniedz 3 mm/s (attēls 2.4.). Pie strāvas I=1,5 kA ātruma pīķis kļūst šaurāks (ap 60 mm). Turpmāka strāvas palielināšana neparāda būtiskas izmaiņas ātruma profilā, izņemot vislielākās strāvas, I=3,5...4,5 kA, kad ātruma sadalījums profila vidusdaļā (X=-100...100 mm) kļūst izliektāks.



Attēls 2.4. Ātruma profili izotermiskā plūsmā pie dažādām strāvām. Pa kreisi strāvas 1,0-2,5 kA, pa labi strāvas 3,0-4,5 kA.

Iegūtie ātruma profili nav simetriski attiecībā pret X=0 mm plakni, ko var skaidrot ar asimetriju vijumu pieslēgumu dēļ - spēks pieslēgumu pusē ir mazāks nekā uz pārējām tīģeļa skaldnēm.

Ātruma profili tāpat tika uzņemti arī stratificētai plūsmai ar sildītāja jaudu P=3,5 kW. Mērījumi veikti uz horizontālas līnijas (Y, Z)=(0 mm, 80 mm). Mērījumi uz augstākām līnijām (lielāka Z koordināte) stratificētai plūsmai bieži vien nebija stabili, lielākoties dēļ augstās sienas temperatūras šajās vietās. Viens no iemesliem sliktai mērījumu kvalitātei pie augstas temperatūras bija ultraskaņas gēla temperatūras ierobežojums. Tāpat tika novērots, ka tuvu tīģeļa dibenam signāla kvalitāte arī ir slikta. To var skaidrot ar to, ka piemaisījumi, kas ir Vuda metālā, stratificētā plūsmā šie piemaisījumi lielākoties sakrājas kādā noteiktā līmenī.



Attēls 2.5. Ātruma profili stratificētā plūsmā pie dažādām strāvām. Pa kreisi strāvas 1,0-2,5 kA, pa labi strāvas 3,0-4,5 kA. Sildītāja jauda Q=3,5 kW.

Arī stratificētai plūsmai tika uzņemti ātruma profili pie dažādām strāvas vērtībām (attēls 2.5). Pie mazām strāvām plūsmas ātrums profila vidusdaļā nemaina savu sadalījuma formu. Pirmo reizi plūsma, kas kustās projām no sienas, parādās pie I=3,5 kA strāvas. Šī strāvas vērtība atbilst kritiskajai strāvai pie sildītāja jaudas Q=3,5 kW, kas iegūta temperatūras mērījumos. Izteikts ātruma palielinājums pie sienas ir novērots pie 4,0 kA strāvas. Ātruma profili, kas iegūti pie strāvas virs kritiskās, ir ļoti līdzīgi profiliem izotermiskajā plūsmā. Pīķa vērtības pie sieniņas abos gadījumos saskan 10% robežās (Strāvām I=4,0 kA un I=4,5 kA maksimālās vērtības izotermiskā plūsmā ir 23,4 mm/s un 27,7 mm/s, stratificētā plūsmā – 25,6 mm/s un 27,9 mm/s). Tomēr maksimuma vietas ir mazliet nobīdītas - X=-170 mm izotermiskai un X=-180 mm stratificētai plūsmai. Ātruma maksimumi pretējā pusē (X=+180 mm) stratificētā plūsmā ir mazāki - aptuveni par 35% mazāki nekā izotermiskajai plūsmai

(strāvām I=4,0 kA un I=4,5 kA maksimālās vērtības izotermiskā plūsmā ir -27,0 mm/s un 29,0 mm/s, stratificētā plūsmā: -18,2 mm/s un -19,2mm/s).

Neskatoties uz to, ka ātruma profili, kas iegūti strāvai virs kritiskās, nedaudz atšķiras no izotermiskajiem profiliem, var secināt, ka arī ātruma mērījumos, tāpat kā temperatūras mērījumos, ir atrasta pāreja starp plūsmas režīmiem.

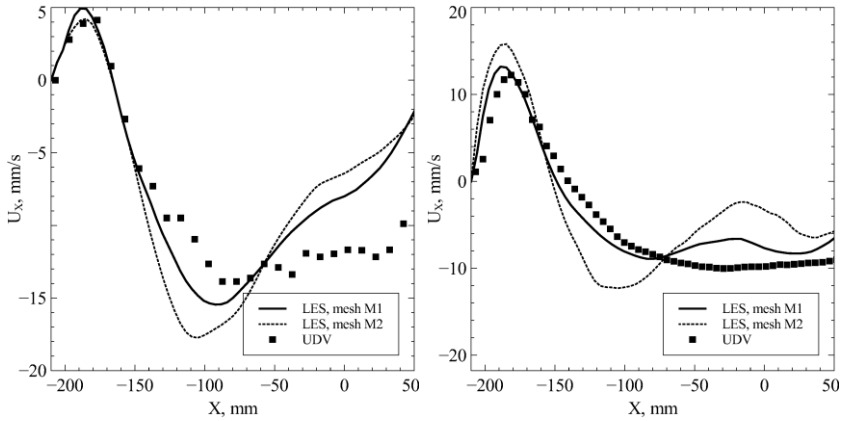
Tabula 2.3. LES aprēķinu parametri. I - summārā strāva abos vijumos, tīģeļa dibena temperatūra vienmēr 80°C, T_{TOP}, h - references temperatūra un siltumapmaiņas koeficients uz brīvās virsmas. Aprēķini A1 veikti ar samazinātu brīvās krišanas paātrinājumu $g=10^{-3}$ m/s^2. Aprēķini, kas atzīmēti ar zvaigznīti ir veikti abiem režģiem, pārējie - tikai M1.

Aprēķins	I, kA	T_{TOP}, °C	H, W/m^{2}K	Re	Ri
A1*	2,5	150	1400	10400	0,08
A2*	3,0	150	1400	6133	17,1
A3*	3,0	230	1000	5813	40,1
A4*	4,2	150	1400	12373	3,0
A5	6,0	150	1400	24347	0,6
A6*	2,1	150	1400	4027	40,9
A7	2,5	130	1400	5200	17,1
A8	2,5	150	1400	4827	28,0
A9	3,0	130	1400	6347	11,1

2.4. Skaitlisko aprēķinu validācija

Skaitliskie aprēķini ar *Large Eddy Simulation* (LES modeli) ir veikti izmantojot *OpenFOAM* atvērtā koda paketi. Aprēķinu domēns sastāv tikai no kausējuma apgabala, kas atbilst aprakstītajam eksperimentam. Aprēķini veikti ar diviem dažādiem režģiem - rupjāko (M1), ar 800 tūkst. elementiem, un smalkāko (M2), ar 3.5 milj. elementiem. Aprēķinos izmantotais laika solis ir 500 μs, un kopējais aprēķinātais laiks – 1200 s, no kurām pēdējās 600 s izmantotas vidējošanai. Tabulā 2.3 apkopoti apkopo visu veikto aprēķinu parametri.

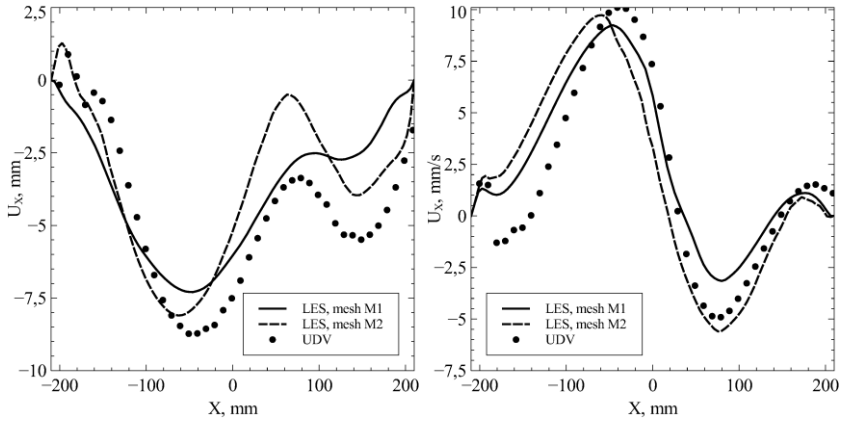
Skaitlisko aprēķinu rezultāti tika salīdzināti ar eksperimentā iegūtajiem uz vairākām līnijām. Līnijas definētas sekojoši - L1 - (Y,Z)=(0 mm,110 mm), L2 - (Y,Z)=(0 mm,80 mm), L3 - (Y,Z)=(180 mm, 80 mm).



Attēls 2.6. U_X ātruma komponentes salīdzinājums aprēķinam A1. Pa kreisi - līnija L1. Pa labi - līnija L2.

Izotermiskai plūsmai rezultāti ir salīdzināti tikai apgabalā X=-210...50 mm, pārējais apgabals nav izmantots salīdzināšanai izteikto ātruma gradientu dēļ virzienā perpendikulāri X asij (ultraskaņas kūļa asij). Tā kā ultraskaņas kūlis pieaug diametrā līdz ar mērījuma dziļumu, mērījuma apgabala apjoms (elementārais apjoms, no kura tiek iegūta informācija par plūsmu) arī pieaug, un tādēļ UDV datu salīdzināšana uz vienas līnijas nav korekta pieeja. Izotermiskā plūsmā ir sasniegta laba sakritība starp LES un UDV pie maziem mērījumu dziļumiem (attēls 2.4.), t.i. X=-210...100 mm. Abām LES līknēm ir līdzīgs raksturs, to maksimālās vērtības atšķiras par 15%, tomēr tālāk no ultraskaņas sensora (X=-50...50 mm) sasniegtā sakritība ir sliktāka. Jāpiebilst arī, ka izteikto ātruma gradientu dēļ, sensora pozīcijas neprecizitāte var radīt ievērojamu kļūdu, jo ir novērots, ka sensora pārbīde pat par 5 mm jebkurā virzienā noved pie ievērojamām izmaiņām ātruma profilā.

Stratificētā plūsmā (aprēķinam A6, attēls 2.6.) ir sasniegta līdzīgas pakāpes sakritība ar eksperimentu. Šoreiz ir iespējams veikt salīdzinājumu visā profila garumā, jo ātruma sadalījumā ir mazāk izteikti gradienti.



Attēls 2.7. U_X ātruma komponentes salīdzinājums aprēķinam A6. Pa kreisi - līnija L2. Pa labi - līnija L4.

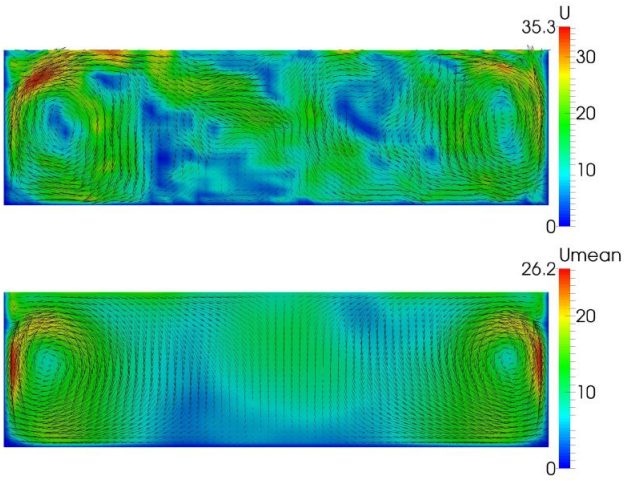
Iespējamās nesakritības starp eksperimenta un aprēķina rezultātiem var izraisīt arī fizikālie pieņēmumi skaitliskajos aprēķinos. Zemāk ir uzskaitīti faktori, kas var ieviest noteiktu kļūdu:

- Materiālu īpašību temperatūras atkarība netika ņemta vērā. Īpaši svarīgi tas var būt stratificētā plūsmā, kurā temperatūras starpības var sasniegt 80K.
- Sakausējuma sastāva iespējamās izmaiņas stratificētā plūsmā.
- Siltumapmaiņas nosacījumi ir idealizēti. Aprēķinā ir pieņemts, ka sienas ir adiabātiskas. Ir novērtēts, ka gadījumā ar lielāko temperatūras gradientu atsevišķās vietās uz sienas var rasties horizontāla plūsma, kas gan ir 30 reizes mazāka par vertikālo siltuma plūsmu.
- Siltumapmaiņas nosacījumi uz brīvās virsmas ir idealizēti. Vienkāršības dēļ tika izmantots konvektīvais siltumapmaiņas nosacījums, ar koeficientu, kas novērtēts no eksperimentālajiem apsvērumiem.
- Konstants temperatūras nosacījums uzdots uz tīģeļa dibena. Novērojot tukša tīģeļa dibenu ar termokameru tika fiksētas temperatūras atšķirības līdz 4K.

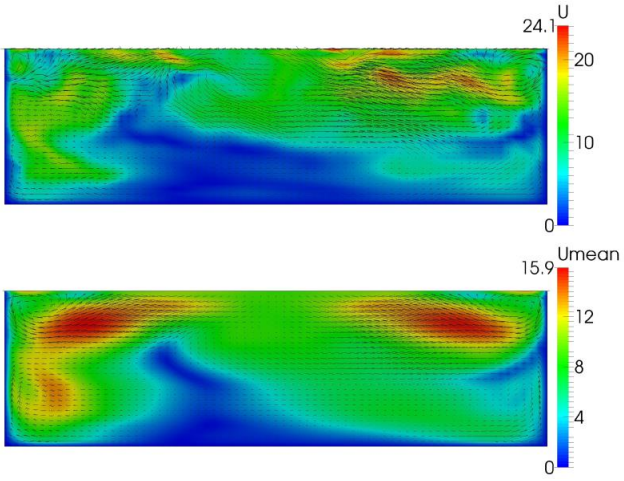
2.5. Ātruma sadalījums izotermiskā un stratificētā plūsmā

Izotermiskā plūsma tika aprēķināta ar samazinātu brīvās krišanas paātrinājumu - $g=10^{-3}$ m/s^2, tāpēc temperatūrai nav būtiskas ietekmes uz ātruma lauku. Šajā gadījumā ātrumam ir ievērojama vertikālā U_Z komponente. Attēls 2.7. parāda ātruma sadalījumu vertikālā šķēlumā tīģeļa vidū, kur var redzēt virpuļus vertikālā plāknē, ar sānu sienām paralēlām asīm. Virpuļu rotācija ir tāda, ka ātrums ir vērts augšup pie sieniņas un lejup - tuvāk tīģeļa centram.

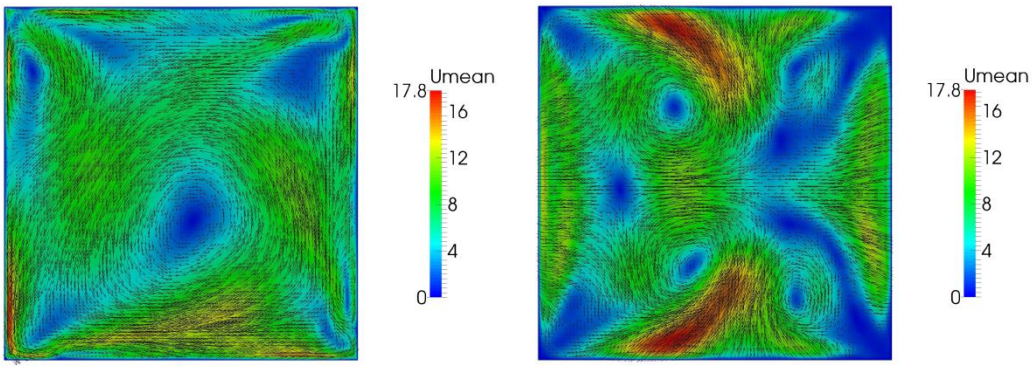
Stratifikācijas gadījumā var prognozēt divdimensionālu plūsmu. Tomēr aprēķini parāda, ka pat pie Ričardsona skaitļa Ri=11.1 (aprēķins A9), plūsmā ir novērojama arī vertikāla ātruma komponente. Šķēlumā Y=0mm (attēls 2.9.) var novērot divus mazākus virpuļus pie katras sienas. Izteiktais virpulis ar raksturīgo ātrumu 16 mm/s augšējā tīģeļa daļā rodas dēļ vertikālās spēka komponentes šajā zonā. Apakšējo virpuli visticamāk rada bīdes spriegumi, jo spēka blīvums šajā zonā ir nepietiekams, lai radītu virpuli ar tipisko ātrumu 5 mm/s. Kopumā var novērot būtisku plūsmas struktūras atšķirību starp izotermisko un stratificēto gadījumu.



Attēls 2.8. Ātruma lauks vertikālā šķēlumā Y=0 aprēķinam A1. Augšā - momentānais ātrums. Apakšā - vidējotais ātrums.



Attēls 2.9. Ātruma lauks vertikālā šķēlumā Y=0 aprēķinam A9. Augšā - momentānais ātrums. Apakšā - vidējotais ātrums.



Attēls 2.10. Vidējotā ātruma lauks horizontālā šķērsgriezumā. Augšā - Z=30 mm, apakšā - Z=90 mm.

Vēl viens interesants aspekts tika novērots stratificētā plūsmā tīģeļa apakšējā daļā. Attēls 2.10. parāda vidējotā ātruma sadalījumu divos horizontālos šķērsgriezumos. Ir redzams, ka šķēlumā Z=90 mm, t.i. 30 mm zem brīvās virsmas, ātruma lauks ir simetrisks pret X=0 plakni, kā to var sagaidīt no sistēmas simetrijas nosacījumiem. Tomēr šķēlumā, kas ir 30 mm virs tīģeļa dibena ir novērojama nesimetriska aina, ar vienu izteiktu virpuli. Līdzīga aina tika novērota tuvu tīģeļa dibenam arī eksperimentā. Šī parādība ir aprakstīta arī literatūrā [6].

2.6. Plūsmas anizotropijas analīze

Lai raksturotu plūsmas anizotropiju, tika izmantots anizotropijas tenzors b_{ij}:

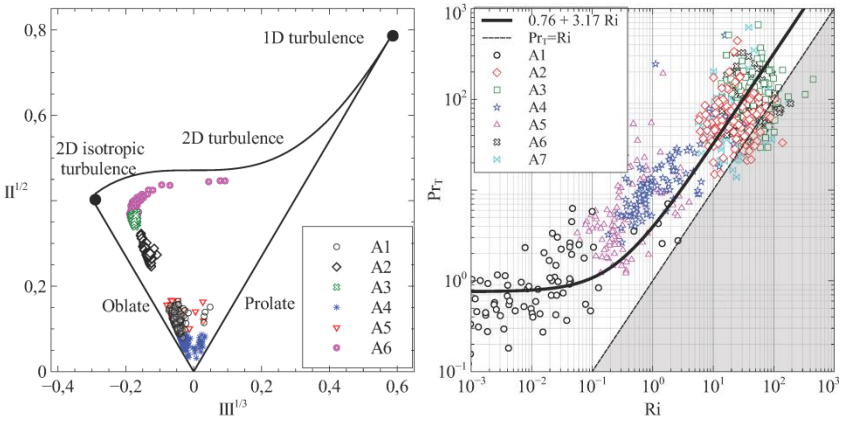
$$b_{ij} = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{\langle u_k' u_k' \rangle} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

Tiek izmantoti divi šī tenzora invarianti: $II=b_{ij}b_{ji}$ un $III=b_{ij}b_{jk}b_{ki}$. II ir pozitīvi definēts un tā vērtība reprezentē anizotropijas pakāpi. Invarianta III zīme norāda uz anizotropijas dabu - ja III ir pozitīvs, plūsma ir ar garenām struktūrām, bet ja III ir negatīvs, tajā dominē plakanas struktūras, "pankūkveida" virpuļi. Lumley [7] parādīja, ka invariantiem II un III ir ierobežots pieļaujamo vērtību intervāls un šīs vērtības plaknē veido t.s. turbulences trijstūri. Punkts (0,0) tajā atbilst trīsdimensionālai turbulencei, galējais kreisais punkts - izotropai 2D turbulencei, galējais labais punkts - 1D turbulencei. Trijstūra augšējā līnija atspoguļo 2D turbulenci, kura kustoties gar šo līniju no kreisās uz labo pusi pārvēršas no plūsmas ar dominējošām plakanām struktūrām uz garenveida struktūrām.

LES rezultāti, kas vidējoti telpā ir parādīti uz šāda trijstūra dažādos laika momentos (Attēls 2.11., pa kreisi). Trim gadījumiem ar augstāko Ričardsona skaitli atbilst punkti augšējā

kreisajā stūrī. A6 gadījumam ir lielākais Ri, tādēļ šie dati ir vistuvāk izotropas 2D turbulences stūrim. Tomēr jāatzīmē, ka visos šajos gadījumos Reinodsa skaitlis ir starp 4000-6100, kur attīstītas turbulences pieņēmums varētu nedarboties. Pārējie punkti trijstūrī novietoti tuvāk 3D turbulences punktam (0,0).

Šie rezultāti norāda uz to, ka Reinoldsa spriegumu tenzors ($\tau_{ij} = -\varrho\overline{u_\iota{}' u_j{}'}$) ir anizotrops stipri stratificētās plūsmās. Bieži izmantotais turbulentās viskozitātes tuvinājums ($\tau_{ij} = 2\mu_T S_{ij}$), uz kuru balstās daudzi turbulences modeļi, varētu nebūt piemērots stratificētu plūsmu aprēķiniem. Ir izstrādāta virkne anizotropu turbulences modeļu [8], kas izmanto turbulentās viskozitātes pieeju, tomēr tiem nepieciešama koeficientu kalibrācija. Viena no svarīgākajām konstantēm turbulentajā siltumapmaiņā ir turbulentais Prandtļa skaitlis $\mathrm{Pr_T}$.



Attēls 2.11. Pa labi - LES rezultāti attēloti uz turbulences trijstūra. Pa labi - $\mathrm{Pr_T}$ kā funkcija no Ri LES aprēķinos.

$$Pr_T = \frac{\overline{u_h{}' u_z{}'}}{2S_{hz}} \frac{\partial \bar{T}/\partial z}{\overline{u_z{}' T'}}$$

Šeit indekss h atbilst horizontālajam ātrumam. Tipiskās Prandtļa skaitļa vērtības turbulentās plūsmās ir $\mathrm{Pr_T}$=0,7...1,0. Tomēr ir parādīts, ka turbulentais Prandtļa skaitlis ir atkarīgs no lokālā temperatūras gradienta. No teorētiskiem apsvērumiem ir zināms, ka pie lieliem Ričardsona skaitļiem $\mathrm{Pr_T}$ ir lineāri atkarīgs no Ri [9].

Iegūtos rezultātus atspoguļo attēls 2.8. Dati ir aproksimēti ar logaritmisko mazāko kvadrātu metodi, un iegūtā līkne ir $\mathrm{Pr_T} = 0{,}76 + 3{,}17\,\mathrm{Ri}$. Vērtība $\mathrm{Pr_{T0}} = 0{,}76$ ir tuva tipiskajām turbulentās plūsmas vērtībām. Koeficients 3,17 arī atbilst literatūrā dotajiem datiem, ir atrastas vērtības 4,0 [9], 5,0 [10] 2,0 [11]. Tika izmantota lineāra funkcija, jo tā dod labāko aproksimāciju lielā Ričardsona skaitļa apgabalā. Tomēr aproksimācija ir

neapmierinoša Ri=0,1...1,0 apgabalā, kur parasti tiek izmantotas citas aproksimācijas funkcijas (attēls 2.11).

3. Rezultātu kopsavilkums un secinājumi

1. Plūsmas ātruma atkarībai no magnētiskā lauka frekvences ir izteikts maksimums $\widetilde{\omega} \approx 5$, ko spēj paredzēt šajā pētījumā izstrādātais analītiskais modelis.
2. Izveidotajā sālsūdens līdzības modelī tika parādīta plūsmas virpuļu apvienošanās – pāreja no 4-virpuļu uz 3-virpuļu režīmu.
3. Eksperimentā ir novērota plūsmas režīma izmaiņa pie kritiskām Lorenca spēka vērtībām (strāvas vijumos) Ričardsona skaitļa vērtībām no 5 līdz 10.
4. Neskatoties uz EM spēku simetriju stratificētā plūsmā aprēķinos un eksperimentā ir novērota nesimetriska ātruma aina, ar dominējošu vienu virpuli tuvu tīģeļa dibenam. Skaitlisko aprēķinu rezultāti tika salīdzināti ar eksperimentālajiem datiem, iegūta laba sakritība.
5. Aprēķini parādīja ātrumu pulsāciju anizotropiju - pulsāciju intensitāte vertikālā virzienā ir mazāka, nekā horizontālā plaknē. Pie ļoti lieliem Ričardsona skaitļiem tika novērota turbulence, kas pēc sava rakstura tuva 2D izotropai turbulencei.
6. Aprēķinos ir parādīts, ka orientētās kristalizācijas metodē ir novērojams turbulentā Prandtļa skaitļa pieaugums līdz ar Ričardsona skaitli, ar aproksimācijas līkni $\mathrm{Pr_T} = 0{,}76 + 3{,}17\ \mathrm{Ri}$. Šis rezultāts saskan ar literatūras datiem.
7. Izstrādātā eksperimentālā iekārta pieļauj lielākus temperatūras gradientus, nekā citi modeļi, kas aprakstīti literatūrā. Tāpēc pastāv zinātniska un praktiska interese veikt turpmākos pētījumus ar citiem magnētisko lauku veidiem (skrienošais, pulsējošais, rotējošais).

Tādējādi kopumā parādīts, ka iespējams optimāli vadīt šo silīcija orientētās kristalizācijas procesu tā, lai īsākā laikā iegūtu nepieciešamās struktūras polikristalisko siliciju, minimizējot piemaisījumu koncentrāciju un tādējādi samazinot materiāla izmaksas un paaugstinot tā lietderības koeficientu elektrības ražošanai saules batarijās.

Izmantotā literatūra

[1] L. L. Tir. Features of mechanical energy transfer to a closed metal circuit in electromagnetic systems with azimuthal currents. *Magnetohydrodynamics*, 12. pp. 100-108, 1976.

[2] F. Taberlet and Y. Fautrelle. Turbulent stirring in an experimental induction furnace. *Journal of Fluid Mechanics*, 159, pp. 409-431, 1985.

[3] N. El-Kaddah, J. Szekely, E.Taberlet, and Y. Fautrelle. Turbulent recirculating flow in induction furnaces: A comparison of measurements with predictions over a range of operating conditions. *Metallurgical Transactions B*, 17B, pp. 687-693, 1986.

[4] J. C. R. Hunt and M. R. Maxey. Estimating velocities and shear stresses in turbulent flows of liquid metals driven by low frequency electromagnetic fields. *In Proceedings of the 2nd Bat-Sheva Intl. Seminar on MHD Flows and Turbulence*, pp. 249-269, 1978.

[5] J. Sommeria, J. Verron. An investigation of nonlinear interactions in a two-dimensional recirculating flow. *Physics of Fluids*, 27:1918-1920, 1984.

[6] K. Dadzis, J. Ehrig, K. Niemietz, O. Pätzold, U. Wunderwald, and J. Friedrich. Model experiments and numerical simulations for directional solidification of multicrystalline silicon in a traveling magnetic field. *Journal of Crystal Growth*, 333, pp. 7-15, 2011.

[7] J.L. Lumley and G.R Newmans. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 81, pp. 161-178, 1977.

[8] S. M. Murman. A scalar anisotropy model for turbulent eddy viscosity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 42, pp.115-130, 2013.

[9] S. K. Venayagamoorthy and D. D. Stretch. On the turbulent prandtl number in homogeneous stably stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 644, pp. 359-369, 2010.

[10] S.S. Zilintikevich, T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, I. Esau, T. Mauritsen, and M. Miles. Turbulence energetics in stably stratified geophysical flows: Strong and weak mixing regimes. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134, pp. 793-799, 2008.

[11] S. Sukoriansky, B. Galperin, and I. Staroselsky. A quasinormal scale elimination model of turbulent flows with stable stratification. *Physics of Fluids*, 17: eid. 085107, 2005.

[12] P. S. Anderson. Measurement of prandtl number as a function of richardson number avoiding self-correlation. *Boundary-Layer Meteorology*, 131, pp. 345-362, 20.